**Лекція №5**

***Рекурсивні та примітивно рекурсивні множини***

На цій лекції будуть розглянуті найпростіші властивості примітивно рекурсивних, рекурсивних та рекурсивно перелічимих множин.

Підмножина *А* множини натуральних чисел *N* називається *рекурсивною* (*примітивно рекурсивною*), якщо характеристична функція множини *А* рекурсивна (примітивно рекурсивна).

Так, як всі ПР функції рекурсивні, то кожна ПР множина є рекурсивною множиною.

**Наслідок.** Підмножина *А* множини натуральних чисел *N* *рекурсивна* або *примітивно рекурсивна* тоді і тільки, коли існує алгоритм, який для довільного *n* ∈*N* дає відповідь на питання *n*∈ *А* чи *n* ∉ *А*.

Причому, у випадку ПР множини такий алгоритм будується з алгоритмів типу

***S****n*+1(*g*, *g*1, …, *gn*), ***R***(*g*, *h*),

а у випадку *Р* множини – з алгоритмів типу

***S****n*+1(*g*, *g*1, …, *gn*), ***R***(*g*, *h*), ***Ml***(*g*),

де *Мl*– оператор слабкої мінімізації.

*Властивості Р та ПР множин*

Характеристичні функції порожньої множини ∅ та множини *N* – це одномісні функції 1 та 0. Ці фукції – ПР функції. Дійсно, вони обчислюються алгоритмами:

1. function χ∅(*x*) 2. function χ*N*(*x*)

begin begin

χ∅ = 1 χ*N* = 0

end. еnd.

Тому множини ∅ та *N* – ПР множини.

Характеристичною функцією для скінченної множини чисел *A* ={*a*1, …, *an*} буде ПР функція χ*A*(*x*) = sg(|*x* – *a*1||*x* – *a*2| … |*x* – *an*|). Вона обчислюється алгоритмом:

function χ*A*(*x*)

begin

if |*x* – *a*1||*x* – *a*2|…|*x* – *an*| = 0 then χ*A* = 0

else χ*A* = 1

end.

Тому, кожна скінченна множина натуральних чисел є ПР множиною.

ПР множинами будуть, наприклад, множина всіх парних чисел та множина всіх простих чисел. Характеристичними функціями цих множин будуть функції

*d*(*x*) = sg rest(*x*,2) та

χ*p*(*x*) = sg |nd(*x*) – 2|

відповідно. Вони обчислюються алгоритмами:

1. function *d*(*x*)

begin

if rest(*x*, 2) = 0 then *d* = 0

else *d* = 1

end.

2. function χ*p*(*x*)

begin

if nd(*x*) = 2 then χ*p* = 0

else χ*p* = 1

end.

Аналогічно можна показати, що ПР множинами будуть і інші множини чисел.

**Теорема 5.1.** Доповнення Р (ПР) множини, а також об’єднання і перетин будь-якої скінченної системи Р (ПР) множин є Р (ПР) множиною.

Доведення. Нехай *f*1(*x*), …, *fn*(*x*) – характеристичні функції множин *A*1,…, *An*. Тоді функції

*f*(*x*) = *f*1(*x*),

*g*(*x*) = *f*1(*x*) … *fn*(*x*),

*h*(*x*) = *sg*(*f*1(*x*) + … + *fn*(*x*))

будуть характеристичними для доповнення множини *А*1, об’єднання та перетину множин *A*1,…, *An*. Якщо *f*1(*x*), …, *fn*(*x*) рекурсивні або ПР функції, то такими ж будуть і функції *f*(*x*), *g*(*x*), *h*(*x*).

Інше доведення полягає в побудові алгоритмів обчислення характеристичних функцій, а саме:

Нехай *f*1(*x*),…, *fn*(*x*) – алгоритми для обчислення характеристичних функцій множин *A*1,…, *An*. Тоді алгоритм

а) function  (*x*)

begin

if *fi*(x) = 0 then =1

else  = 0

end

обчислює характеристичну для .

b) Алгоритм

function *f*(*x*)

begin

if *fi*(*x*) × ... × *fn*(*x*) = 0 then *f* = 0

else *f* = 1

end

обчислює характеристичну функцію об’єднання множин.

c) Алгоритм

function *f*(*x*)

begin

if (*f*1(*x*) + ... + *fn*(*x*)) = 0 then *f* = 0

else *f* = 1

end

обчислює характеристичну функцію перетину множин.

**Теорема 5.2**. Якщо всюди визначена функція *f*(*x*) рекурсивна (ПР), то множина *А* розв’язків рівняння

*f*(*x*) = 0

рекурсивна (ПР).

Доведення. Характеристична функція множини розв’язків обчислюється наступним алгоритмом:

function χ(*x*)

begin

if *f*(*x*) = 0 then χ = 0

else χ = 1

end.

Множина значень ПР функції, взагалі кажучи, не буде ПР множиною, ні навіть Р множиною. Але існують умови того, щоб множина значень ПР (Р) функції була ПР (Р) множиною.

**Теорема 5.3.** Якщо ПР функція *f*(*x*) задовольняє умові *f*(*x*) ≥ *x* (*x* = 0, 1, 2, …), зокрема, якщо *f*(*x*) монотонно зростає, то множина *М* всіх значень цієї функції є ПР множиною.

Доведення. *М* = {*f*(0), *f*(1), …}. Алгоритм обчислення характеристичної функції цієї множини наступний:

function χ*M* (*x*)

begin

*s* = 0

for *i* = 0 to *x*

if *f*(*i*) = *x* then *s* = 1

if *s* = 1 then χ*M*  = 0

else χ*M* = 1

end.